Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Kontinuumsmechanik

1.1 Einführung

In der Klassischen Mechanik galt immer :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Nun betrachtet man eine kontinuierliche Massendichte $\rho(\vec{x}, t)$ mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Damit hat man

$$\begin{aligned} \Delta V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum_i \Delta \vec{F}_i \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum_i \frac{\Delta \vec{F}_i}{\Delta V} \\ &= \sum_i \vec{b}_i \end{aligned}$$

wobei $\vec{b}_i$ dann die Kraftdichten sind. Auch die Ableitungen müssen näher betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

Um Schreibarbeit zu sparen und um die Formeln nicht unübersichtlich zu machen, wird im Folgenden die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{v} &= v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

Man nennt dies auch die substantielle Ableitung. Faßt man alles bisherige zusammen, hat man:

$$\rho\left(\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}(\vec{x},t)+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=\sum_i\vec{b}_i(\vec{x},t)$$

Weiterhin braucht man noch die $\vec{b}$‘s, wobei hier generell zwei Sorten von Kraftdichten zu betrachten sind:

- äußere Kraftdichten: Gravitation ...
- innere Kraftdichten: Wechselwirkung der Partikel untereinander, die durch den sogenannten Spannungstensor $\mathbf{T}=(\mathbf{T}_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ beschrieben werden

Beispiel: innere Kraft in x-Richtung

$$\begin{aligned}
F_x = &\quad \mathbf{T}_{xx}(x_{max})\Delta y\Delta z-\mathbf{T}_{xx}(x_{min})\Delta y\Delta z\\
&+\ \mathbf{T}_{xy}(y_{max})\Delta x\Delta z-\mathbf{T}_{xy}(y_{min})\Delta x\Delta z\\
&+\ \mathbf{T}_{xz}(z_{max})\Delta x\Delta y-\mathbf{T}_{xz}(z_{min})\Delta x\Delta y\\
\Rightarrow\quad F_x &= \oiint\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{xx}\\ \mathbf{T}_{xy}\\ \mathbf{T}_{xz}\end{pmatrix}\cdot d\vec{f}\overset{\text{Gauß}}{=}\iiint dV\,\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{T}}_x\\
\Rightarrow\quad &\text{innere Kraftdichte}\quad(b_{innere})\leftrightarrow\mathbf{T}
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\boxed{\rho\left(\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}(\vec{x},t)+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=\vec{b}(\vec{x},t)+\mathrm{div}\,\mathbf{T}}\tag{1.1}$$

Wobei $\mathrm{div}\,\mathbf{T}\equiv\vec{e}_i\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{T}}_i$ ist.
Die Gleichung

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial v_i}{dt}+v_j\partial_j v_i\right)=b_i+\partial_j T_{ij}}$$

zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})=0}\quad\text{bzw.}\quad\boxed{\frac{d\rho}{dt}+\partial_j(\rho v_j)=0}\tag{1.2}$$

bilden die *Grundgleichungen* der Kontinuumsmechanik. Der Spannungstensor $\mathbf{T}$ der vom Material abhängt, ist symmetrisch und wird durch die Zustandsgleichungen des Materials festgelegt. Weitere Differentialgleichungen, z.B. für die innere Energie und Entropie, sind vorzugeben (s. Thermodynamik).

Direkt aus den Grundgleichungen ergeben sich die beiden folgenden Sätze. Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung der Impuls- und Energiedichte in einem vorgegebenem Kontrollvolumen.

Satz 1.1 *Für alle ortsfesten Kontrollvolumina R gilt:*

$$\frac{d}{dt}\iiint_R \rho\vec{v}dV = \iiint_R \vec{b}\; dV - \oiint_{\partial R} \mathbf{\Pi}\; d\vec{f}$$

mit $\rho\vec{v}$ = Impulsdichte
und $\mathbf{\Pi}_{ij} := -\mathbf{T}_{ij} + \rho v_i v_j$ (Tensor der Impulsstromdichte).

Die Behauptung ist nach Anwendung des Gaußschen Satzes äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) &= \vec{b} - \operatorname{div}\mathbf{\Pi} \\
&= \vec{b} + \operatorname{div}\mathbf{T} - {}''\operatorname{div}(\rho v_i v_j)'' \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= b_i - \partial_j \mathbf{T}_{ij} - \partial_j(\rho v_i v_j)
\end{aligned}$$

Womit die oben genannte Bewegungsgleichung folgt.

Satz 1.2 *Für alle ortsfesten Kontrollvolumina gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\iiint_R \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d^3x = &- \oiint_{\partial R}\left(\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right)\cdot\vec{v} - \mathbf{T}\vec{v}\right)d\vec{f} \\
&+ \iiint_R \vec{b}\cdot\vec{v}\; d^3x - \iiint_R \operatorname{Sp}(\mathbf{TD})\; d^3x
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{D}$ der symmetrische Anteil von $(\partial_i x_j)_{1\le i,j\le 3} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j - \partial_j v_i)_{ij}$ ist.

Beweis: Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} &= 0 \\
\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\iiint_R \rho d^3x &= -\oiint_{\partial R}(\rho\vec{v})d\vec{f} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{v}^2 + \rho\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{v}^2\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} - (\rho\vec{v})((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v})
\end{aligned}$$

wobei $\dot{\vec{v}} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$. Betrachte nun

$$\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right)\vec{v}\right)$$

$$\operatorname{div}(\vec{j}u) = u\operatorname{div}\vec{j} + \vec{j}\vec{\nabla}u$$

mit $\vec{j} = \rho\vec{v}$ und $u = \frac{1}{2}\vec{v}^2$.

$$\Rightarrow\quad \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right)\vec{v}\right) = \frac{1}{2}v^2\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Nun ist
$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a}\times \mathrm{rot}\,\vec{b} + \vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{a}$$
Damit folgt
$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$
bzw.
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right) = -\mathrm{div}\,\left(\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\right)\vec{v}\right) + \rho\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$$
Es bleibt noch $\rho\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{b}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{T}$. Was ist nun div $(\mathbf{T}\cdot\vec{v})$?
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\mathbf{T}\cdot\vec{v}) &= \partial_i(\mathbf{T}_{ij}v_j) \\
&= (\partial_i\mathbf{T}_{ij})v_{ij} + \mathbf{T}_{ij}\partial v_j \\
&= \vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{T} + \mathbf{T}_{ij}\underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)}_{\equiv\mathbf{D}_{ij}} \\
\mathbf{M} &= \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{M}+\mathbf{M}^t)}_{\mathrm{symm.Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{M}-\mathbf{M}^t)}_{\mathrm{antisymm.Anteil}} \\
\mathbf{T}\cdot\mathbf{M} &= \sum_{ij}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{M}_{ji} \\
&= \sum_{ij}\mathbf{T}_{ij}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{M}+\mathbf{M}^t)\right) \\
\Rightarrow\quad \mathbf{T}_{ij}\mathbf{D}_{ji} &= \mathrm{Sp}\,(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}) \\
\Rightarrow\quad \rho\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} &= \vec{b}\cdot\vec{v} + \mathrm{div}\,(\mathbf{T}\cdot\vec{v}) - \mathrm{Sp}\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{T})
\end{aligned}$$

q.e.d.

1.2 Hydrodynamik, reibungsfreie Strömungen

Reibungsfreie Strömung heißt: Alle Rechnungen ohne Viskosität. Also betrachten wir jetzt Flüssigkeiten, Gase, nicht aber Honig! Der Spannungstensor ist jetzt
$$\mathbf{T} = -p(\vec{x},t)\mathbf{1}$$
Die innere Kraftdichte ist damit
$$(\mathrm{div}\,\mathbf{T})_j \equiv \partial_i\mathbf{T}_{ij} = \partial_i\mathbf{T}_{ji} = \partial_i\delta_{ij}(-p) = -\partial_j p$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{T} = -\vec{\nabla}p$$
Damit hat die Bewegungsgleichung die Form
$$\boxed{\rho\dot{\vec{v}} = \vec{b} - \vec{\nabla}p}$$
(Die Kontinuitätsgleichung 1.2 muß natürlich auch für jedes System erfllt werden.)

1.2.1 Inkompressible Flüssigkeiten

Für inkompressible Flüssigkeiten ist

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0 \quad \text{(z.B.Wasser)}$$

Daraus folgt eine Entkoppelung der Gleichungen. Es ist nun nur noch $v(\vec{x},t)$ unbekannt!

Kontinuitätsgleichung:

$$\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

In Worten: Das Geschwindigkeitsfeld ist quellen- und senkenfrei.

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{v}\right) &= -\vec{\nabla}p + \vec{b} \\ \Rightarrow \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}) &= -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0}\vec{b} \end{aligned}$$

Nimmt man konservative Kräfte an, wie z.B. ein Schwerefeld:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r\rho_0 \\ &= -\mathrm{grad}\left(-\frac{GM}{r}\rho_0\right) \\ &= -\rho_0\vec{\nabla}\Phi_g \end{aligned}$$

Φ_g ist hier das Gravitationspotential. Die allgemeine Form für konservative Volumenkräfte ist:

$$\vec{b} = -\rho_o\vec{\nabla}\Phi$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0} + \Phi\right)}$$

für ideale Flüssigkeiten

$$\left[\text{Anders bei elastische Fluide:} \quad p = \mathbf{\Pi}(\rho) \overset{\text{z.B.}}{=} A\rho^{\gamma} \quad \gamma < 1 \quad \text{antrope Gase}\right]$$

1.2.2 Inkompressible Flüssigkeiten, stationär, wirbelfrei

Wobei

- stationär: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
- wirbelfrei: $\text{rot}\ \vec{v} = 0$

Satz 1.3 (Bernoulli) *Stationäre, wirbelfreie Strömungen idealer Flüssigkeiten unter konservativen Volumenkräften werden vollständig durch die folgenden Gleichungen beschrieben:*

- $\text{div}\ \vec{v} = 0$ *($\Leftarrow$ Kontinuitätsgleichung)*
- $\text{rot}\ \vec{v} = 0$ *(Voraussetzung)*
- $\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{p}{\rho_0} + \Phi = \text{const.}$ *unabhängig vom Ort* *(Energiesatz)*

Beweis: Betrachte

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \vec{v}\times\text{rot}\ \vec{v}$$

wobei nach Voraussetzung $\text{rot}\ \vec{v} = 0$ ist. Damit wird aus der Bewegungsgleichung (mit $\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = 0$)

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0} + \Phi\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0} + \Phi + \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p}{\rho_0} + \Phi + \frac{1}{2}v^2 = \text{const}$$

Oder anders:

$$\text{Wirbel (rot } \vec{v} \neq 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Verletzung der Energieerhaltung}$$

Folgerung: Sei z.B. $\vec{v} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Phi = gz \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho_0} = \text{const} - gz \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_0}{\rho_0} + g\|z\| = \frac{p}{\rho_0} \\
&\Rightarrow \quad p(z) = p_0 + \rho_0 g\|z\|
\end{aligned}$$

Man nennt $\frac{1}{2}\rho_0 v^2$ den *Staudruck*.
Setzt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Für eine ebene Strömung gilt dann:

- div $\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 = 0$
- rot $\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 = 0$
- $\frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2\right) + \frac{p(x_1,x_2)}{\rho_0} + \Phi = \text{const.}$ (Energiesatz)

Es ist also

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$$

und damit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) v_1(x_1, x_2) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\Delta_2 v_1 = 0 \qquad \text{und ebenso} \qquad \Delta_2 v_2 = 0$$

Hierbei soll Δ_2 der Laplace-Operator in 2 Dimensionen sein. Jede analytische Funktion $g(z) = v_1(x_1, x_2) + i v_2(x_1, x_2)$ ist eine Lösung der Bernoulli-Gleichung.

Bernoulli-Gleichung für ebene Strömungen	$\Leftrightarrow$	Cauchy-Riemannsche- Differentialgleichung

1.3 Elastische Fluide, Reibungsfreie und Kompressibel

Keine Reibung bedeutet (s.o.):

$$\text{div } \mathbf{T} = -\vec{\nabla} p$$

$$\mathbf{T} = -p(\vec{x}, t)\mathbf{1}$$

Man nimmt nun

$$p(\vec{x}, t) = \pi(\rho(\vec{x}, t))$$

$$\left(\quad \pi' = \frac{d\pi}{dt} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho > 0 \right)$$

1.3.1 Grundgleichungen

Es gelten wieder die Gleichungen

$$\rho\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla} p - \rho\vec{\nabla}\Phi \qquad ; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho\vec{v}) = 0$$

Um die linke der beiden Gleichungen zu vereinfachen, führt man eine kompliziert scheinende Variablentransformation durch:

$$\text{Druck } (p) \quad \rightsquigarrow \quad \text{Enthalpie } (W)$$

$W(\vec{x},t)$ ist hierbei

$$W(\vec{x},t) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi'(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}\, d\tilde{\rho}$$

$$\left(\text{z.B.}: \quad \pi = A\rho^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad W = \int_{\rho_0}^{\rho} A\tilde{\rho}^{\gamma-2}\gamma\, d\tilde{\rho} = \frac{A\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + \text{const}\right)$$

Der Zusammenhang mit dem Druckmuß noch hergestellt werden:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{\nabla}p = \pi'(\rho(\vec{x},t))\vec{\nabla}\rho(\vec{x},t) \\ \vec{\nabla}W = \vec{\nabla}\rho\left(\frac{\partial}{\partial\rho}W\right) = \left(\vec{\nabla}\rho\right)\frac{\pi'(\rho)}{\rho} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}W = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt dann

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla}W - \vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla}(W+\Phi)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0$$

$\Rightarrow$ Besser mit Enthalpie als mit Druck rechnen!

Satz 1.4 *Stationäre wirbelfreie Strömungen elastischer Fluide unter konservativen Volumenkräften werden vollständig beschrieben durch:*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0 \quad ; \quad \text{rot}\,\vec{v} = 0 \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{v}(\vec{x})\right)^2 + \Phi(\vec{x}) + W(\vec{x}) = \text{const.}$$

1.3.2 Wellenphänomene

(Im Folgenden keine Volumenkräfte)
Zur Vereinfachung sei $\alpha(\rho) := \frac{\pi'(\rho)}{\rho}$. Aus den (Zwischen-) Ergebnissen des Kapitels Grundgleichungen erhält man

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}W = \ldots = -\alpha(\rho)\vec{\nabla}\rho$$

Das übliche Vorgenen bei Wellen ist:

- Ausgangslösung:
$$(\rho_0, \vec{v}_0 \equiv 0)$$
- Linearisierung um diese Situation:
$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0 + \Delta\rho(\vec{x},t)$$

Voraussetzung ist natürlich eine ,,kleine" Auslenkung:
Es sei $0 < \delta \ll 1$ mit einer vorgegebenen Konstante δ. Dann soll gelten:

$$| \rho - \rho_0 | \quad , \quad | \vec{\nabla} \rho | \quad , \quad | \vec{v} | \quad , \quad | \vec{\nabla} \vec{v} | \quad \sim O(\delta)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + O(\delta^2) \quad &= \quad -\alpha(\rho_0 + \Delta\rho)\, \vec{\nabla}(\rho_0 + \Delta\rho) \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \quad (-\alpha(\rho_0) - \alpha'(\rho_0)\Delta\rho + \ldots)\, \vec{\nabla}(\rho_0 + \Delta\rho)
\end{aligned}$$

Nur lineare Glieder in δ werden berücksichtigt:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \alpha(\rho_0)\vec{\nabla}\rho = 0 \qquad \Big| \text{div}\,(\ldots)$$

$$\Rightarrow \qquad \text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) + \alpha(\rho_0)\underbrace{\text{div grad}}_{\Delta}\rho = 0$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \,\text{div}\, \vec{v} = 0 \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial t}(\ldots)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \rho_0 \underbrace{\text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)}_{\text{einsetzen}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \rho_0\ \alpha(\rho_0)\ \Delta\rho = 0$$

bzw.:

$$\boxed{\Delta\rho(\vec{x},t) - \frac{1}{\rho_0\alpha(\rho_0)}\frac{\partial^2\rho(\vec{x},t)}{\partial t^2} = 0}$$

Das ist eine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_{\text{s}} = \sqrt{\rho_0\alpha(\rho_0)} = \sqrt{\pi'(\rho_0)}$$

Hier nennt man c_{s} die Schallgeschwindigkeit.

$$\begin{array}{lllll}
v & < & c_{\text{s}} & \leftrightarrow & \text{subsonischer Bereich} \\
v & > & c_{\text{s}} & \leftrightarrow & \text{supersonischer Bereich}
\end{array}$$

Man nennt das Verhältnis v/c_{s} die Machzahl. Achtung: Die hier gemachte Näherung bricht für Schockwellen zusammen. Inkompressibel bedeutet: Machzahl $\ll$ 1 bzw. < 0.05.

1.4 Potentialströmungen

Voraussetzung:

- Stationäre Strömung
$$\frac{\partial}{\partial t}\square = 0$$
- Wirbelfreiheit
$$\text{rot}\ \vec{v} = 0$$

$$\text{rot}\ \vec{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists\ \text{Potentialfunktion}\ \ u(\vec{x},t) \quad \text{mit} \quad v(\vec{x},t) = \vec{\nabla} u(\vec{x},t)$$

1.4.1 Inkompressible Flüssigkeiten

$\rho = \rho_0$:
$$\text{Kontinutiätsgleichung} \qquad \Rightarrow \qquad \text{div}\ \vec{v} = 0$$

bzw.
$$0 = \text{div}\ \vec{v} = \Delta u$$

Laplace-Gleichung (= Potentialgleichung):

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

Randbedingungen z.B.:

$\rightarrow$ am Rand ist $\vec{v}$ tangential:
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$\Rightarrow$
$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

oder
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

$\Rightarrow$ von Neumann-Randbedingungen

(Wertvorgabe auf dem Rand $\Rightarrow$ Dirichletsche Randbedingungen)

1.4.2 Elastische Fluide (Kompressible Fluide)

$$p = A\rho^{\gamma}$$

Ziel:

$$\text{Kontinuitätsgleichung formulieren} \qquad 0 = \text{div}\,(\rho \text{ grad } u)$$

Enthalpie:

$$W = A\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + K$$

(hier: K = 0) ohne Volumenkräfte gilt (Energiesatz):

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}u\right)^2 + A\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = C$$

$$\rho = \kappa\left(C - \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}u\right)^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \text{mit} \qquad \kappa = \left(A\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{div}\left(\left(C - \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}u\right)^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\vec{\nabla}u\right) = 0}$$

Das ist eine häßliche Gleichung, da sie

- elliptisch (für $(\vec{\nabla}u)^2$ klein)
- parabolisch
- hyperbolisch (für $(\vec{\nabla}u)^2$ groß)

sein kann!

1.5 Viskose Strömungen

(klebrige Strömungen, innere Reibung)
Spannungstensor:

$$\mathbf{T} = -p(\vec{x},t)\mathbf{1} + \mathbf{T}_{vis}$$

Was ist $\mathbf{T}_{vis}$? Ansatz: $\mathbf{T} \sim \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$ (muß empirisch gefunden werden)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

D ist symmetrisch und hat 6 unabhängige Bestimmungsstücke.

$$\text{Sp}\,\mathbf{D} = \text{div}\,\vec{v}$$

Spurlos:

$$\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{D})\mathbf{1}\right) = \mathbf{M}$$

Ansatz:

$$\mathbf{T}_{vis} = \lambda_1 \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{D})\mathbf{1}\right) + \lambda_2(\mathrm{Sp}\,\mathbf{D})\mathbf{1}$$

Literatur:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{vis} &= 2\mu \overbrace{\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{D})\mathbf{1}\right)}^{\text{spurlos, symmetrisch}} + \xi(\mathrm{Sp}\,\mathbf{D})\mathbf{1} \\
&= 2\mu\mathbf{D} + (\mathrm{div}\,\vec{v})\left(\xi - \frac{2}{3}\mu\right)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

1.6 Navier-Stokes-Gleichungen

sind partielle Differentialgleichungen, welche viskose Strömungen beschreiben. Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen

$$\rho\dot{\vec{v}} = \vec{b} + \mathrm{div}\,\mathbf{T}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0$$

Hier ist nun

$$\mathbf{T} = -p\,\mathbf{1} + \mathbf{T}_{vis} = -p\,\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} + \lambda(\mathrm{div}\,\vec{v})\,\mathbf{1}$$

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung muß nun in einer Zwischenrechnung div $\mathbf{T}$ ermittelt werden:

- div $\mathbf{D} = ?$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\,\mathbf{D})_i &= \partial_j \mathbf{D}_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\partial_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}v_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial_j v_j)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\vec{v}\right) \\
\Rightarrow \qquad 2\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} &= \Delta\vec{v} + \vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v})
\end{aligned}$$

- div (div $\vec{v}$) = ?

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\,((\mathrm{div}\,\vec{v})\,\mathbf{1}))_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\partial_k v_k)\,\delta_{ij}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}\,\vec{v}) \\
\Rightarrow \qquad \mathrm{div}\,((\mathrm{div}\,\vec{v})\,\mathbf{1}) &= \vec{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\vec{v})
\end{aligned}$$

Damit hat man:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathbf{T}_{vis} &= \mu\left(\Delta\vec{v}+\vec{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\right)+\lambda\vec{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) \\ &= \mu\Delta\vec{v}+(\mu+\lambda)\,\vec{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung 1.1 + Kontinuitätsgleichung 1.2

$$\boxed{\begin{gathered}\rho\dot{\vec{v}}=\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\mu\Delta\vec{v}+(\mu+\lambda)\,\vec{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\vec{v})+\vec{b} \\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})=0\end{gathered}}$$

Navier-Stokes-Gleichungen

inkompressibler Fall ($\rho=\rho_0$):

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\quad\Rightarrow\quad\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})=0\quad\Rightarrow\quad\mathrm{div}\,\vec{v}=0$$

$\Leftrightarrow$ Quellen-/ Senkenfreiheit

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}\underbrace{\left(\frac{1}{\rho}p\right)}_{\equiv\bar{p}}+\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\equiv\nu}\Delta\vec{v}+\frac{1}{\rho}\vec{b}$$

wobei ν die kinematische Zähigkeit ist.

Dimensionslose Form:

- charakteristische Länge: l_0
- charakteristische Geschwindigkeit: v_0
- charakteristische Zeit des Problems: $\tau_0=\frac{l_0}{v_0}$

$$\widetilde{\vec{v}}\equiv\frac{1}{v_0}\vec{v}\quad;\quad\widetilde{\vec{x}}\equiv\frac{1}{x_0}\vec{x}\quad;\quad\widetilde{t}\equiv\frac{1}{\tau_0}t$$

$$\frac{v_0}{\tau_0}\frac{\partial\widetilde{\vec{v}}}{\partial\widetilde{t}}+\frac{v_0^2}{l_0}\left(\vec{v}\cdot\widetilde{\vec{\nabla}}\right)\widetilde{\vec{v}}=-\frac{1}{l_0}\widetilde{\vec{\nabla}}\bar{p}+\frac{\nu v_0}{l_0^2}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{v}}\left[+\frac{1}{\rho_0}\vec{b}\right]$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial\widetilde{\vec{v}}}{\partial\widetilde{t}}+\left(\widetilde{\vec{v}}\cdot\widetilde{\vec{\nabla}}\right)\widetilde{\vec{v}}=-\widetilde{\vec{\nabla}}\left(\frac{p}{\rho_0v_0^2}\right)+\underbrace{\frac{\nu}{l_0v_0}}_{\text{dimensionslos}}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{v}}$$

$$\boxed{R=\frac{l_0v_0}{\nu}}$$

Reynold-Zahl

Lösung hängt nur von R ab, nicht von den tatsächlichen Ausmaßen. $\Rightarrow$ Ähnliche Lösungen (Strömungen), wenn $R_1 = R_2$.

Stokes-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}\right)}$$

(wurde vorher aufgestellt) gilt für langsame Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten.
$\rightarrow$ Nur für sehr zähe Flüssigkeiten anwendbar.

$$\leftrightarrow \qquad R \text{ sehr klein} \leftrightarrow \qquad \nu \text{ groß}$$

($R \rightarrow \infty$ $\qquad \Rightarrow$ $\qquad$ ideales Fluid)

Kapitel 2

Magnetohydrodynamik (MHD)

2.1 Grundgleichungen

Wir gehen von einem dichten, nicht relativistischen Plasma aus, das langsam in Raum und Zeit veränderlich ist.
„dicht" $\widehat{=}$ Viele Stöße pro Gyrationsumlauf.

Größen:

Massendichte	$\rho_m(\vec{x},t)$	Materie
Geschwindigkeit	$\vec{v}(\vec{x},t)$	
Druck	$p(\vec{x},t)$	
Raumladungsdichte	$\rho(\vec{x},t)$	
(Flächen-) Stromdichte	$\vec{j}(\vec{x},t)$	
elektrisches Feld	$\vec{E}(\vec{x},t)$	Felder
magnetisches Feld	$\vec{B}(\vec{x},t)$	

Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

(wobei $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ sind)

Rest analog zur **Hydrodynamik:**

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \vec{v}) = 0$$

$$\rho_m \dot{\vec{v}} = \rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_m \vec{g}$$

Zustandsgleichungen:

$$p = p(\rho_m, T) \qquad \Big(\text{ideales Gas} \quad \Rightarrow \qquad p = nkT = \frac{\rho_m}{m} kT\Big)$$

Ohmsches Gesetz (empirisch):

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' \qquad \text{(Ruhesystem der Materie)}$$

Transformation in das Ortssystem mit $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$:

$$\Rightarrow \qquad \vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{v} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

MHD-Näherungen:

- Vernachlässigung des Verschiebungsstroms: $\vec{C} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$
  primitive Begründung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\dot{E}}{\operatorname{rot} B} \approx \frac{\frac{E}{c^2 \tau_0}}{B} l_0 \approx \frac{E}{cB}\frac{l_0}{c\tau_0} \approx \frac{E}{cB}\frac{v_0}{c} \ll 1$$

- lasse $\rho \vec{E}$ in der Bewegungsgleichung weg, denn

$$\frac{\rho E}{|\, \vec{j} \times \vec{B} \,|} = \frac{\rho E}{jB} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{l_0 B^2}\mu_0 = \left(\frac{E}{cB}\right)^2 \ll 1$$

  $\Rightarrow$ nichtlineare Driftgeschwindigkeiten

- $\frac{\rho v}{j} \ll 1$

Damit sind die Grundgleichungen der MHD:

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\
\text{div}\,\vec{B} &= 0\\
\text{rot}\,\vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\\
\text{div}\,\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div}\,(\rho_m \vec{v}) &= 0\\
\rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right) &= -\vec{\nabla} p + \vec{j}\times\vec{B} + \rho_m \vec{g}\\
p &= p(\rho_m)\\
\vec{j} &= \sigma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}}$$

(in sich selbst konsistent, sehr kompliziert)

2.2 Magnetokinematik

Nun sei $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ vorgegeben. Damit kann man den materiellen Teil der Grundgleichungen vergessen und es bleiben die Maxwell-Gleichungen und das Ohmsche Gesetz zu lösen. Gesucht sind $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{j}$.

Wir eliminieren $\vec{E}$ und $\vec{j}$ uns suchen $\vec{B}$.

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{1}{\mu_0}\text{rot}\,\vec{B}\\
\vec{E} &= \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v}\times\vec{B}\\
&= \frac{1}{\mu_0\sigma}\text{rot}\,\vec{B} - \vec{v}\times\vec{B}\\
\Rightarrow \qquad \text{rot}\,E &= -\dot{\vec{B}}\\
&= \frac{1}{\mu_0\sigma}\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{B} - \text{rot}\,\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}$$

wenn σ räumlich konstant ist! Nun ist

$$\text{rot}\,\text{rot}\, = \text{grad}\,\text{div}\, - \Delta$$

und

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Damit folgt:

$$\boxed{\dot{\vec{B}} - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} = \mathrm{rot}\, \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)}$$

Folgerungen:

2.2.1 Magnetische Flußerhaltung

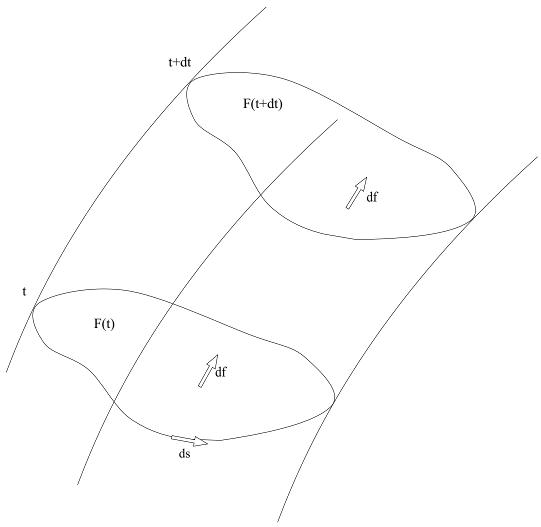
entspricht dem Grenzfall unendlich hoher Leitfähigkeit.

$$\sigma \longrightarrow \infty \quad : \text{(wenig Stöße)} \qquad \dot{\vec{B}} = \mathrm{rot}\, \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$\sigma \longrightarrow \infty$ impliziert : $\left[\qquad \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(Ohm)} \qquad \right]$

Behauptung:

Fluß durch eine mit der Materie mitbewegten Fläche ist konstant.



Magnetischer Fluß:

$$\Phi_m(t) = \iint\limits_{F(t)} \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$\Rightarrow$

$$d\Phi_m = \Phi_m(t+dt) - \Phi_m(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{F(t+dt)} \vec{B}(t+dt)\cdot d\vec{f} - \iint\limits_{F(t)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{f} \\
&= \iint\limits_{F(t+dt)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{f} + \iint\limits_{F(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt \cdot d\vec{f} - \iint\limits_{F(t)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{f}
\end{aligned}
$$

wenn man in dt linearisiert.
Gaußscher Satz:

$$
\begin{aligned}
\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{f} &= \iiint \underbrace{\operatorname{div}\vec{B}}_{=0}\, d\tau = 0 \\
&= \iint\limits_{F(t+dt)} \vec{B}(t+dt)\cdot d\vec{f} - \iint\limits_{F(t)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{f} + \iint\limits_{\text{Rand}} \vec{B}\cdot(d\vec{s}\times\vec{v}\;dt)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
d\Phi_m &= -\iint\limits_{\text{Rand}} \vec{B}\cdot(d\vec{s}\times\vec{v}\;dt) + \iint\limits_{F(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt\cdot d\vec{f} \\
&= \left[\iint\limits_{\text{Boden}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} - \oint\limits_{Boden} \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{s}\right] dt
\end{aligned}
$$

Spatprodukt:

$$
(d\vec{s}\times\vec{v})\cdot\vec{B} = d\vec{s}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)
$$

Stokescher Satz:

$$
\oint\limits_{\partial F} \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{F} \operatorname{rot}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{f}
$$

$\Rightarrow$

$$
d\Phi_m = dt \iint\limits_{F(t)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right) d\vec{f}
$$

$\Rightarrow$

$$
\boxed{\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = 0}
$$

Wichtig ist die Flußerhaltung zum Beispiel beim Gravitationskollaps von Sternen. Hohe Ionisationsgrade $\Rightarrow$ σ groß $\Rightarrow$ Φ_m eingeforen.

Beispiel: **Stern mit 1 Gauß**

Weißer Zwerg	$\frac{R}{R_\odot}\approx 100$	$\Rightarrow$	$B\approx 10^4 B_\odot \approx 10$ kGauß
Neutronenstern	$R\approx 10\text{km}\approx 10^{-5}R_\odot$	$\Rightarrow$	$B\approx 10^{10}B_\odot\approx 10^{10}$ kGauß

2.2.2 Dissipation von Magnetfeldern

$$\dot{\vec{B}} - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} = \text{rot}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Spezialannahme:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 0 \\ \sigma &= \text{endlich} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\vec{B}} - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} = 0$$

Einfache Geometrie: $\vec{B} = (0, 0, B(x,t)) \Rightarrow$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Das ist eine parabolische Differentialgleichung. Elliptische Differentialgleichungen, wie z.B. Wellengleichungen sind wesentlich einfacher zu lösen.

Fourier-Zerlegung:

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(k,t)\; e^{ikx}\; dk$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
$\ldots \Rightarrow$

$$\frac{\partial \tilde{B}(k,t)}{\partial t} = -k^2 \frac{1}{\mu_0 \sigma} \tilde{B}(k,t)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{B}(k,t) = \tilde{B}(k,0)\; e^{-\frac{k^2}{\mu_0 \sigma} t}$$

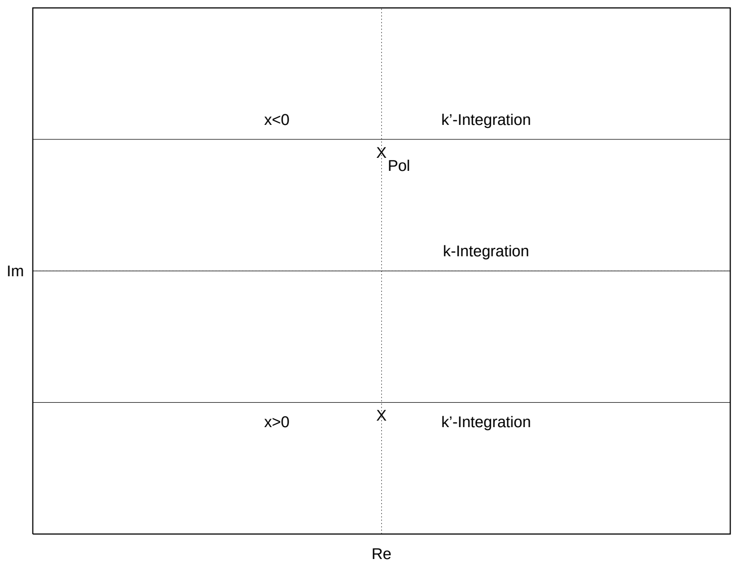
Anfangsbedingungen: t=0 $\quad B = B_0 \quad x \leq 0$
$\quad B = 0 \quad x > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(k,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(x,0)\; e^{-ikx}\; dx \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{B_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-ikx+\varepsilon x}\; dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{B_0}{2\pi} \left[\frac{e^{ikx}\; e^{\varepsilon x}}{-ikx + \varepsilon} \right]_{-\infty}^{0} \right) \\
&= \lim_{l \to \infty} \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{B_0}{2\pi} \left(\frac{1}{-ikx + \varepsilon} - \frac{e^{ikl}\; e^{\varepsilon l}}{-ikx + \varepsilon} \right) \right) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{B_0}{2\pi} \frac{1}{(-i)(k + i\varepsilon)} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{B_0}{2\pi} \frac{i}{k + i\varepsilon} \right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
B(x,t) &= i\frac{B_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{1}{k+i\varepsilon}e^{-\frac{k^2}{\mu_0\sigma}t}\;dk \\
&\overset{\substack{\text{quadr.}\\ Erg.}}{=} i\frac{B_0}{2\pi}e^{-i\frac{\mu_0\sigma}{2t}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{\mu_0\sigma}\overbrace{\left(k-ix\frac{\mu_0\sigma}{2t}\right)^2}^{k'^2\in\mathbb{C}}}\frac{1}{k+i\varepsilon}\;dk \\
&= \frac{B_0}{2\pi}e^{-i\frac{\mu_0\sigma}{2t}x}\int\limits_{,,-\infty''}^{,,\infty''} e^{-\frac{t}{\mu_0\sigma}k'^2}\frac{1}{k'+i\varepsilon+ix\frac{\mu_0\sigma}{2t}}\;dk'
\end{aligned}
$$

Das letzte Integral ist funktionentheoretisch auszuwerten da es in der Gaußschen-Ebene eine Parallele zur x-Achse beschreibt. Wählt man einen geschlossenen Weg, bestehend aus diesem Integrationsweg, der x-Achse und zwei Randstücken, so kann man das Integral anhand des Cauchyschen Integralsatzes auf ein Integral entlang der x-Achse zurückführen. Es bleibt noch zu klären, ob die um ε neben dem Integrationsweg liegenden Pole innerhalb oder außerhalb des geschlossenen Weges liegen.



Für $x > 0$ liegt der Pol außerhalb des Weges:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{-\infty\\ k'\in\mathbb{R}}}^{\infty} e^{-\frac{k'^2}{\mu_0\sigma}t}\frac{1}{k'+ix\frac{\mu_0\sigma}{2t}}\;dk' &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{k'^2}{\mu_0\sigma}t}\left(k'-ix\frac{\mu_0\sigma}{2t}\right)}{k'^2-\left(x\frac{\mu_0\sigma}{2t}\right)^2}\;dk' \\
&= -ix\frac{\mu_0\sigma}{2t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{k'^2}{\mu_0\sigma}t}}{k'^2-\left(x\frac{\mu_0\sigma}{2t}\right)^2}\;dk'
\end{aligned}
$$

Man definiert nun

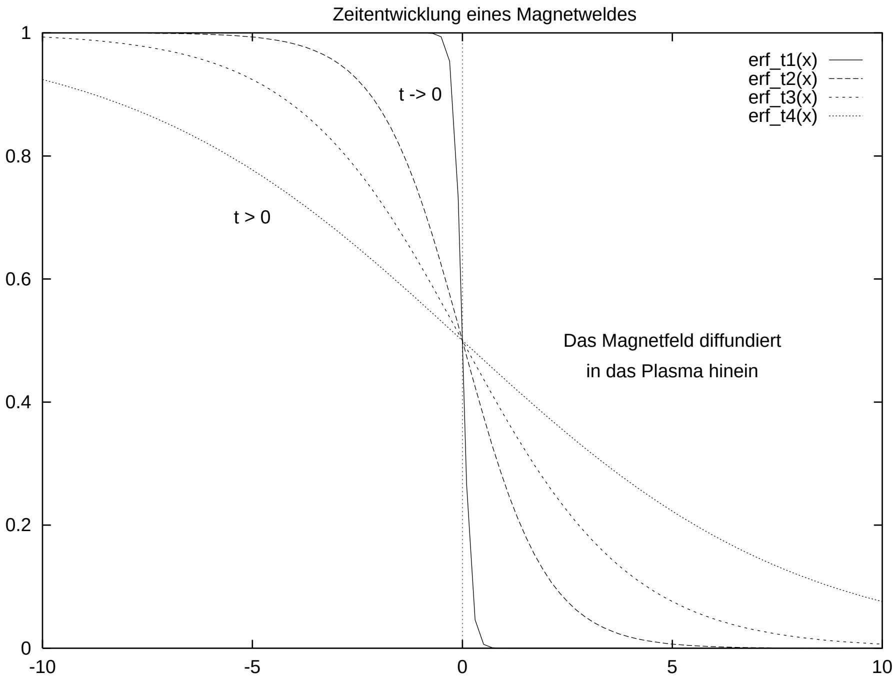
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a^2k^2}}{k^2+b^2}\, dk = \mathrm{erfc}\,(ab)\frac{\pi}{b}e^{a^2b^2}$$

für die error-function. $\Rightarrow$

$$B(x,t) = \frac{B_0}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x\right)$$

Für $x < 0$ liegt der Pol innerhalb des Weges, und es kommt noch das entsprechende Residuum hinzu:

$$\begin{aligned} B(x,t) &= B_0 - \frac{B_0}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}|x|\right) \\ &= \frac{B_0}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x\right) \end{aligned}$$



Es gibt noch einen anderen Lösungsweg, der aber bei weitem nicht so allgemein ist. Setzt man

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x \propto \frac{x}{\sqrt{t}}$$

und

$$B = B(\xi) \qquad ; \qquad B' = \frac{dB}{d\xi}$$

dann ist

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
&= B'\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t^3}}\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x\right)\\
&= -\frac{1}{2t}\xi B'\\
\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= \frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)\\
&= \frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\mu_0\sigma}{4t}B''
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{2t}\xi B' = \frac{1}{4t}B''$$

$\Rightarrow$

$$B'' = -2\xi B'$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B''}{B'} = -2\xi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\xi}\ln B' = -2\xi$$

$\Rightarrow$

$$B' = C_1 e^{-\xi^2}$$

$\Rightarrow$

$$B(\xi) = \int_a^\xi C_1 e^{-\xi'^2}\, d\xi' = C_2 + C_3 \operatorname{erfc}(\xi)$$

Nun müssen die Konstanten noch mit den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

$$B(x,t) = \frac{B_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x\right)$$

Typische Abfallzeit:

$$t = \mu_0\sigma x^2$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{4t}}x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.48 \approx 0.5$$

$\Rightarrow$

$$B = 0.24 B_0$$

mit

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$\Rightarrow$

$$t = \frac{\sigma}{c^2\varepsilon_0}x^2$$

Leitfähigkeit:

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \frac{ne^2\tau_c}{m}$$

wobei τ_c die Stoßzeit ist.

	Abklingzeit	
	$[sec]$	$[a]$
Sterninneres	$\sim 10^{17}$	$\sim 10^{10}$
Fusionsplasma	$\sim 10^{2}$	
interstellarer Raum	$\sim 10^{28}$	$\sim 10^{21}$

2.2.3 Energiesatz

Ohmsches Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{j}^2}{\sigma} &= \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{rot}\, \vec{B}\right) \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \end{aligned}$$

mit $\quad \mathrm{div}\,(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} \quad$ folgt:

$$\frac{\vec{j}^2}{\sigma} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} + \vec{j} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Für $\vec{E} \times \vec{H}$ hatte man in der Elektrodynamik den Poynting-Vektor $\vec{S}$ eingeführt. Weiterhin ist $\quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad$, womit folgt:

$$\frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \mathrm{div}\,\vec{S} + \vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \dot{\vec{B}}$$

$$\boxed{\frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \mathrm{div}\,\vec{S} + \vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)}$$

Dabei sind

- die Ohmschen Verluste

$$\frac{\vec{j}^2}{\sigma}$$

- Poynting-Fluß

$$\mathrm{div}\,\vec{S}$$

- an der Materie geleistete Arbeit

$$\vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)$$

- magnetische Flußdichte

$$\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

Energiebilanz im Beispiel einer Magnetfeld-Dissipation:
Die rechte Seite der Gleichung ist:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\, dV \overset{\text{bei festem V}}{=} \int\limits_V \frac{1}{\mu_0}\dot{\vec{B}} \cdot \vec{B}\, dV$$

wobei nach der Diffusionsgleichung $\dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0 \sigma}\Delta\vec{B}$, wenn $\vec{v} = 0$ ist. Nebenrechnung:

$$\sum_i \vec{\nabla}\left(B_i \vec{\nabla} B_i\right) = \sum_i \left(\vec{\nabla} B_i\right)^2 + B_i \Delta B_i$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\, dV &= \int\limits_V \frac{1}{\mu_0}\sum_i \operatorname{div}\left(B_i \vec{\nabla} B_i\right) dV - \int\limits_V \frac{1}{\mu_0}\sum_i \left(\vec{\nabla} B_i\right)^2 dV \\
&= \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\sum_i \oiint_{\partial V}\left(B_i \vec{\nabla} B_i\right) df}_{\substack{=0 \\ \partial V \to \infty}} - \int\limits_V \frac{1}{\mu_0}\sum_i \left(\vec{\nabla} B_i\right)^2 dV \\
&< 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ magnetische Feldenergie nimmt tatsächlich ab!
$\to$ „Dissipation"
$\to$ $\frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \operatorname{div}\vec{S} > 0$

2.2.4 Magnetischer Druck

Kraftdichtegleichung:

$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_m\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho_m \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B}$$

Hydrodynamik:

$$\text{Kraftdichte} = \operatorname{div}\,(\text{ Tensor })$$

$$\vec{\nabla} p \longrightarrow \vec{\nabla}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}$ braucht man

$$\begin{aligned}
\left(\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}\right)_i &= \varepsilon_{ijk} \underbrace{\left(\text{rot } \vec{B}\right)_j}_{=\varepsilon_{jlm} \frac{\partial}{\partial x_l} B_m} B_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} B_m\right) B_k \\
&= -\left(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} B_m\right) B_k \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} B_k\right) B_k + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} B_i\right) B_k \\
&= \vec{B} \cdot \vec{\nabla} B_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{B}^2 + B_k B_i\right)
\end{aligned}$$

denn

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(B_k B_i\right) = B_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} B_k}_{=\text{div } \vec{B}} + B_k \frac{\partial}{\partial x_k} B_i$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\text{rot } \vec{B}\right) \times \vec{B} = -\text{div } \mathbf{\Pi}$$

mit

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2 \mathbf{1} - \vec{B} \circ \vec{B}\right)$$

Hierbei ist das dyadische Produkt

$$\vec{B} \circ \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 B_1 & B_1 B_2 & B_1 B_3 \\ B_2 B_1 & B_2 B_2 & B_2 B_3 \\ B_3 B_1 & B_3 B_2 & B_3 B_3 \end{pmatrix}$$

verwendet worden.

$$-\text{div } \mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} \left(\vec{B}^2\right) = \vec{j} \times \vec{B}$$

damit

$$\boxed{\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2\right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} + \rho_m \vec{g}}$$

Das Magnetfeld verstärkt oder vermindert Druckkräfte!

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{div } \left(p \mathbf{1} + \mathbf{\Pi}\right) + \rho_m \vec{g}$$

lokal : Koordinatenachsen sollen $\perp$ und $\|$ zum Magnetfeld gewählt sein!

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = B\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \frac{1}{2\mu_0}\left[B^2\mathbf{1} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Senkrecht zum Feld wird der Druck erhöht, in z-Richtung wird der Druck vermindert.

Beispiele:

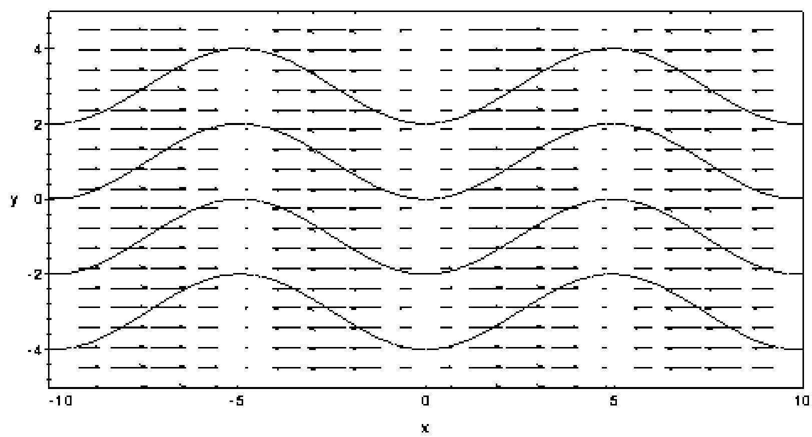
- $$\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$$

  Kraftdichte : $-\vec{\nabla}\mathbf{\Pi}$ $\Rightarrow$

  $$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} B(x)^2 & 0 & 0 \\ 0 & B(x)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B(x)^2 \end{pmatrix}$$

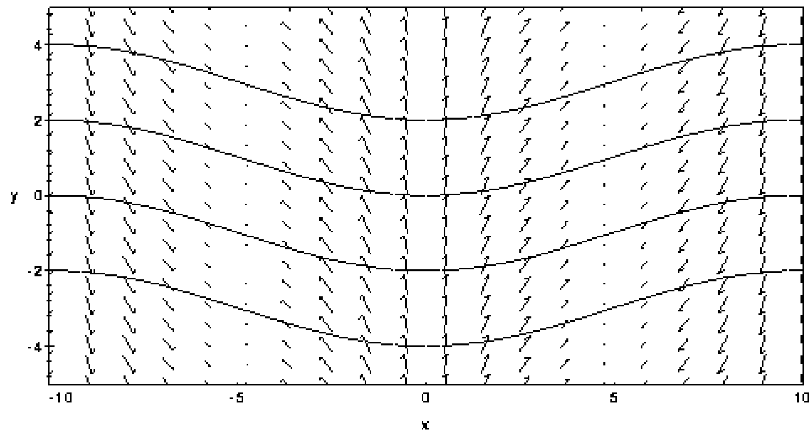
  $\Rightarrow$

  $$\text{Kraftdichte} = -\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_0}B(x)^2\right)$$

- $$\vec{B} = B_0\vec{e}_x + B_1\sin(kx)\vec{e}_z$$

  $$\text{Kraftdichte} = \frac{1}{\mu_0}B_0B_1k\cos(kx)\left(\vec{e}_z - \frac{B_1}{B_0}\sin(kx)\vec{e}_x\right)$$



Tendenz:

Magnetfeldlinien wollen sich ,, gerade biegen " !

2.3 Magnetostatik von Sonnenfilamenten

$$\frac{\partial}{\partial t}\square = 0 \qquad \vec{v} = 0$$

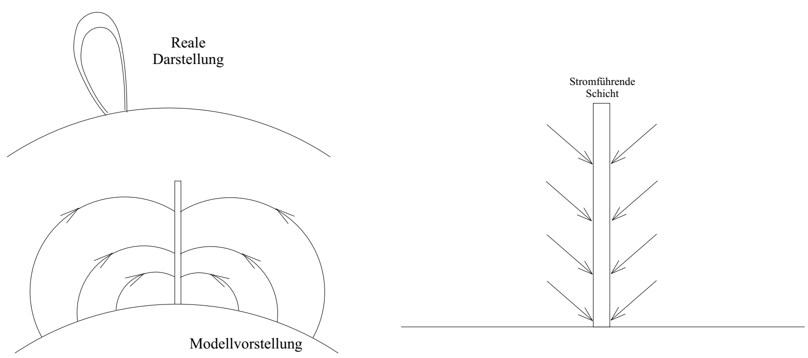
$$\sum \text{aller Kräfte} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_m \vec{g}$$

2.3.1 Qualitatives Bild

(ohne p)

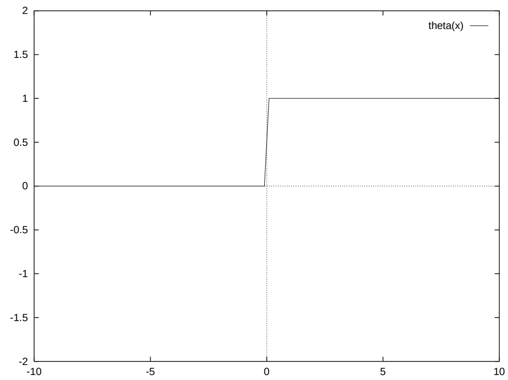


$$\begin{aligned} B_x^{\text{links}} &= B_x^{\text{rechts}} \\ B_z^{\text{links}} &= -B_z^{\text{rechts}} \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\, \mathbf{\Pi}(x) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ &= 2\frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z B_x B_z^{\mathrm{rechts}} \delta(x) \end{aligned}$$

Wenn man für B_z die Stufenfunktion $\Theta(x)$ mit einem Sprung von $2B_z^{\mathrm{rechts}}$ ansetzt.



Die Ableitung der Θ-Funktion ist ja bekanntlich die δ-Funktion.

$\Rightarrow$ Die magnetische Kraft könnte in dieser Konfiguration die Schwerkraft kompensieren.

2.3.2 Quantitative Betrachtung

Voraussetzungen:

- ebene Sonnenoberfläche $\hat{=}$ (x, y)-Ebene
- Schwerkraft in $-\vec{e}_z$-Richtung
- alles unabhängig von y

$$\vec{B} = \vec{B}(x,z) \qquad \text{und} \qquad \vec{A} = \vec{A}(x,z)$$

  wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential ist:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{B} \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

- ideales Gas:

$$p = n k_b T = \frac{\rho_m}{m} k_b T$$

- statisches Gleichgewicht:

$$-\vec{\nabla} p + \vec{j} \times \vec{B} - \rho_m g \vec{e}_z = 0$$

Man definiere nun

$$A(x,z) = A_y(x,z)$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix}$$

liefert schon fast das gewünschte. Vertauschung der Ableitungen kann man mit einem Kreuzprodukt mit einem Einheitsvektor erreichen:

$$\vec{\nabla} A \times \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\frac{\partial A}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(x,z) = \vec{\nabla} A \times \vec{e}_y + \vec{B}_y(x,z)$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ j_z &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} \\ j_y &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0}\Delta A \end{aligned}$$

Gleichgewicht: y-Komponente:

$$p = p(x,z) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\vec{0} + \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_y + \vec{0} = \vec{0}$$

mit

$$\left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_y = j_z B_x - j_x B_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} B_x + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z} B_z$$

$\Rightarrow$

$$\left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_z \frac{\partial}{\partial z}\right) B_y = 0$$

$\Rightarrow$

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B_y = 0$$

Das heißt, B_y ist längs der Magnetfeldlinien in der x-z-Ebene konstant. $A(x,z) = \text{const.}$ sind Magnetfeldlinien, weil

$$0 = dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{-\frac{\partial A}{\partial x}}{\frac{\partial A}{\partial z}} = \frac{B_z}{B_x}$$

und damit ist $\quad B_y = B_y(A)$.

x-Komponente:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + j_y B_z - j_z B_y = 0$$

mit

$$j_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

z-Komponente:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + j_x B_y - j_y B_x - \rho_m g = 0$$

mit

$$j_y = -\frac{1}{\mu_0}\Delta A \qquad B_z = \frac{\partial A}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ x-Komponente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\Delta A + B_y\frac{dB_y}{dA}\right)\frac{\partial A}{\partial x}$$

z-Komponente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\Delta A + B_y\frac{dB_y}{dA}\right)\frac{\partial A}{\partial z} - \rho_m g$$

Wähle nun (A, z) als Koordinaten (anstelle von (x, z)), also etwa

$$p = p(A, z) = p(A(x, z), z)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z &= \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_z \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_x &= \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_A + \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_z \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_x \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\frac{1}{\mu_0}\left(\Delta A + B_y\frac{dB_y}{dA}\right)\frac{\partial A}{\partial x}$$

x-Komponente:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_z = -\frac{1}{\mu_0}\left(\Delta A + \frac{dB_y}{dA}\right)$$

z-Komponente:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_A = -\rho_m g$$

mit der idealen Gasgleichung folgt

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_A = -\frac{mg}{k_b T}p$$

Man definiert eine Skalenhöhe:

$$h = \frac{k_b T}{mg}$$

so daß

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_A = -\frac{1}{h} p$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} p(A,z) &= p(A,0) e^{-\int_0^z \frac{dz'}{h(A,z')}} \\ &= p_0(A) e^{-\int_0^z \frac{dz'}{h(A,z')}} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die x-Komponente:

$$\Delta A + B_y(A) \frac{dB_y}{dA} + \mu_0 \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_z = 0$$

erhält man eine (hochgradig) nicht lineare elliptische Differentialgleichung für $A(x,z)$ bei gegebenen $p(A,z)$ und $B_y(A)$.

Einfaches Modell

Weitere Annahmen:

- $$T = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad h = \text{const}$$
- $$B_y = 0$$
- B-Feld sei unabhängig von z, d.h. betrachte Bereich mit Ausdehnung $\ll$ Höhenausdehnung der Stromschicht.

$$B_x = -\frac{\partial A}{\partial z} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = a_0(x) - b_0(x) z$$

(Geradengleichung)

$$B_z = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{da_0}{dx} - \frac{db_0(x)}{dx} z$$

soll nicht von z abhängen. Damit folgt

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{db_0(x)}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = a_0(x) - b_0 z$$

$\Rightarrow$

$$z = \frac{a_0(x) - A}{b_0}$$

$$\frac{d^2 a_0}{dx^2} + \mu_0 \frac{dp_0(A)}{dA} e^{-\frac{z}{h}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(A)}{dA} e^{\frac{A-a_0}{b_0 h}} &= f(x) \\ \frac{dp_0(A)}{dA} &= e^{-\frac{A}{b_0 h}} g(x) \\ 0 &= e^{-\frac{A}{b_0 h}} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$g(x) = C$$

$\Rightarrow$

$$p_0(A) = p_0 e^{-\frac{A}{b_0 h}}$$

Damit ist die Differentialgleichung:

$$a_0'' - \frac{\mu_0 p_0}{b_0 h} e^{-\frac{a_0}{b_0 h}} = 0$$

multipliziert mit a_0' ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} a_0'^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\mu_0 p_0 e^{-\frac{a_0}{b_0 h}}\right) = 0$$

Integration liefert

$$\frac{1}{2} a_0'^2 + \mu_0 p_0 e^{-\frac{a_0}{b_0 h}} = \frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$

$$a_0' = \frac{d}{dx} a_0 = \pm\sqrt{C - 2\mu_0 p_0 e^{-\frac{a_0}{b_0 h}}}$$

$\Rightarrow$

$$dx = \frac{da_0}{\pm\sqrt{C - 2\mu_0 p_0 e^{-\frac{a_0}{b_0 h}}}}$$

$\Rightarrow$

$$x = \pm \int \frac{da_0}{\sqrt{C - 2\mu_0 p_0 e^{-\frac{a_0}{b_0 h}}}}$$

$\ldots \Rightarrow$

$$a_0(x) = 2 b_0 h \ln\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{C} x}{2 b_0 h}\right)\right) + b_0 h \ln\left(\frac{2\mu_0 p_0}{C}\right)$$

$\Rightarrow \qquad p(A,z) \qquad \Rightarrow$

$$p(x) = \frac{B_z^2(x\to\infty)}{2\mu_0} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{B_z^2(x\to\infty)}{2b_0 h} x\right)}$$

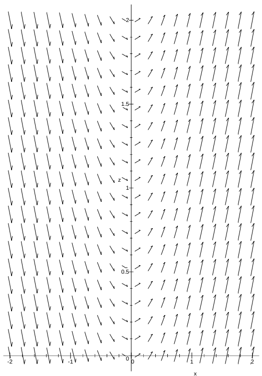
mit

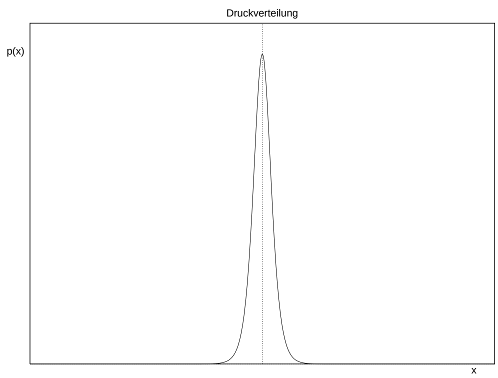
$$B_z^2(x\to\infty) = \sqrt{C} = B_\infty$$

oder genauer

$$B_z = B_\infty \tanh\left(\frac{B_\infty}{2b_0 h} x\right)$$

Das Magnetfeld und der Druck verhalten sich wie folgt:





In der Anschauung war dies eine δ-Funktion. Die Natur kennt natürlich keine δ-Funktion, approximiert sie aber.

2.4 Tokamak-Gleichgewicht

Axialsymmetrisches Problem: Koordinaten $\qquad (\rho, \varphi, z)$

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$$

$$-\vec{\nabla} p + \vec{j} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\, \vec{B}$$

Das Magnetfeld läßt sich wie folgt zerlegen:

$$\vec{B} = \underbrace{B_\rho(\rho,z)\vec{e}_\rho + B_z(\rho,z)\vec{e}_z}_{\substack{\text{meridiales}\\ \text{(oder poloidales)}\\ \text{Magnetfeld}}} + \underbrace{B_\varphi(\rho,z)\vec{e}_\varphi}_{\substack{\text{toroidales}\\ \text{Magnetfeld}}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial}{\partial z}B_z=0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho B_z)=0$$

Man kann nun eine Flußfunktion $\Psi=\Psi(\rho,z)$ einführen, so daß gilt:

$$\rho B_\rho=-\frac{\partial\Psi}{\partial z} \qquad \text{und} \qquad \rho B_z=\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$$

oder

$$B_{\mathrm{pol}}=\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\Psi\times\vec{e}_\varphi$$

Der Zusammenhang mit dem Vektorpotential ist:

$$\Psi=\rho A_\varphi \qquad \left(\ B_{\mathrm{pol}}=(\mathrm{rot}\,\vec{A})_{\mathrm{pol}}\ \right)$$

Stromdichte:

$$\begin{aligned}
j_\rho &= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\\
j_z &= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\varphi)\\
j_\varphi &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial\rho}\right)\\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}p=\vec{j}\times\vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)p=0$$

$\Rightarrow$ Der Druck ist längs der $\vec{B}$-Linien konstant, d.h. $p=p(\Psi)$, denn $\vec{B}_{\mathrm{pol}}$-Linien sind die Linien mit $\Psi=$const.

$$(\vec{\nabla}p)_\varphi=(\vec{j}\times\vec{B})_\varphi \qquad \Rightarrow \qquad j_zB_\rho-j_\rho B_z=0$$

$\Rightarrow$

$$B_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\varphi)+B_z\frac{\partial}{\partial z}(\rho B_\varphi)=0$$

also

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\rho B_\varphi)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho B_\varphi=f(\Psi)$$

dies hängt zusammen mit dem poloidalen Strom, denn

$$\oint_{\text{Kreis }(z=0)}\vec{B}\cdot d\vec{s}=2\pi\rho B_\varphi=\mu_0 I$$

also

$$\rho B_\varphi=f(\Psi)=\frac{\mu_0}{2\pi}I(\Psi)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{d\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} &= j_\varphi B_z - j_z B_\varphi \\
&= -\frac{1}{\mu_0\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) \\
\frac{dp}{d\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial z} &= j_\rho B_\varphi - j_\varphi B_\rho \\
&= -\frac{1}{\mu_0\rho}B_\varphi\frac{d}{d\Psi}(\rho B_\varphi)\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)
\end{aligned}
$$

also

$$\frac{dp}{d\Psi} = -\frac{1}{\mu_0\rho^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) - \frac{\mu_0}{(2\pi\rho)^2}I(\Psi)\frac{dI}{d\Psi}$$

oder

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 I(\Psi)\frac{dI}{d\Psi}+\mu_0\rho^2\frac{dp}{d\psi}=0}$$

Grad-Shafranov-Gleichung

Dabei sind $I(\Psi)$ und $p(\Psi)$ beliebige Funktionen. Diese Gleichung kann man nur numerisch lösen.

2.5 Axialsymmetrische, stationäre Probleme

Als Beispiele sind Tokamaks mit Plasmaströmung oder magnetische Sterne mit paralleler Dipol- und Rotationsachse zu nennen.

Koordinaten (ρ, φ, z)

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\text{rot}\,\vec{B}$$

$$\rho_m(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \vec{j}\times\vec{B} - \rho_m\vec{\nabla}V$$

wobei V das Gravitationspotential ist. Weiterhin gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div}\,(\rho_m\vec{v}) = 0$$

und das Ohmsche-Gesetz für $\sigma \to \infty$

$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

- Gleichungen für $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$, ρ_m und $\vec{j}$
- Axialsymmetrie:

$$\frac{\partial}{\partial\Phi} = 0$$

- Stationarität:
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$
(dies steckt aber schon in den Gleichungen)

wie oben gilt
$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\text{rot}\,\vec{B}$$
$\Rightarrow$
$$\vec{B} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\Psi \times \vec{e}_\varphi + B_\varphi \vec{e}_\varphi$$
wobei $\Psi = \Psi(\rho, z)$ und $B_\varphi = B_\varphi(\rho, z)$
$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\varphi)\,\vec{e}_z - \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$
φ-Komponente:
$$-\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}}_{=0} + v_z B_\rho - v_\rho B_z = 0$$
$\Rightarrow$
$$\frac{v_z}{v_\rho} = \frac{B_z}{B_\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_{\text{pol}} \| \vec{B}_{\text{pol}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_{\text{pol}} = \kappa(\rho, z)\vec{B}_{\text{pol}}$$
Ohmsches-Gesetz:
$$\vec{B}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \Phi(\Psi) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}\|\vec{\nabla}\Psi$$

$$\begin{aligned}
& \vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\Psi\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \\
= \; & \vec{\nabla}\Psi\cdot\left(-\frac{d\Phi}{d\Psi}\right)\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla}\Psi\left((\vec{v}_{\text{pol}} + v_\varphi\vec{e}_\varphi)\times\left(\vec{B}_{\text{pol}} + B_\varphi\vec{e}_\varphi\right)\right) \\
= \; & -(\vec{\nabla}\Psi)^2\frac{d\Phi}{d\Psi} + \vec{\nabla}\Psi\left(\kappa(\rho,z)\frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\Psi\times\vec{e}_\varphi\right)\vec{e}_\varphi}_{-\vec{\nabla}\Psi}B_\varphi + v_\varphi\vec{e}_\varphi\times\frac{1}{\rho}\left(\vec{\nabla}\Psi\times\vec{e}_\varphi\right)\right) \\
= \; & -(\vec{\nabla}\Psi)^2\underbrace{\frac{d\Phi}{d\Psi}}_{=\Omega(\Psi)} + (\vec{\nabla}\Psi)^2\left(-\frac{1}{\rho}\kappa(\rho,z)B_\varphi + \frac{1}{\rho}v_\varphi\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$
$\Rightarrow$
$$v_\varphi = \kappa B_\varphi + \rho\Omega(\Psi)$$
beziehungsweise
$$\vec{v} = \kappa(\rho,z)\vec{B} + \rho\Omega(\Psi)\vec{e}_\varphi$$

Das heißt, eine Strömung längs $\vec{B}$ plus einer Bewegung in φ-Richtung mit festem $\Omega(\Psi)$.

$$\text{div}\,(\rho_m \vec{v}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\text{div}\,\left(\rho_m \kappa \vec{B} + \rho_m \rho \Omega(\Psi) \vec{e}_\varphi\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\text{div}\,\left(\rho_m \kappa \vec{B}\right) = \rho_m \kappa\,\text{div}\,\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\rho_m \kappa) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho_m \kappa = F(\Psi)$$

Bewegungsgleichung:

$$\rho_m (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{j}\times\vec{B} - \rho_m \vec{\nabla} V$$

Einsetzen von $\vec{v}$ ergibt

$$\left(\rho_m \kappa \vec{B}\cdot\vec{\nabla} + \rho_m \rho \Omega \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \Phi}\right)(\kappa B_\varphi + \rho\Omega \vec{e}_\varphi)$$

$$= F(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\left(\kappa B_\rho \vec{e}_\rho + \kappa B_z \vec{e}_z + (\kappa B_\varphi + \rho\Omega)\,\vec{e}_\varphi\right) + F\Omega\left(B_\rho \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi} + B_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \rho_m \rho \Omega^2 \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}$$

Nebenrechnung:

$$(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{e}_\rho = B_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi}$$

$$(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{e}_\varphi = B_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\;\vec{e}_x + \sin\varphi\;\vec{e}_y) = -sin\varphi\;\vec{e}_x + \cos\;\;\varphi\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_\rho$$

$$\begin{aligned}
\rho_m (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \quad & F\left(\left(\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_\rho) - (\kappa B_\varphi + \rho\Omega)\,B_\varphi \frac{1}{\rho} - \Omega B_\varphi - \frac{\rho_m \rho}{F}\Omega^2\right)\vec{e}_\rho\right. \\
& + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_z)\,\vec{e}_z \\
& \left. + \left(\kappa B_\rho B_\varphi \frac{1}{\rho} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_\varphi + \rho\Omega) + \Omega B_\rho\right)\vec{e}_\varphi\right)
\end{aligned}$$

φ-Komponente

$$\begin{aligned}
F\left(\kappa B_\rho B_\varphi \frac{1}{\rho} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_\varphi + \rho\Omega) + \Omega B_\rho\right) &= j_z B\rho - j_\rho B_z \\
&= \frac{1}{\mu_0 \rho}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\rho B_\varphi) \\
&= F\frac{1}{\rho}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\rho\kappa B_\varphi + \rho^2\Omega) \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left((\rho\kappa B_\varphi + \rho^2\Omega)\,F\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left[\rho B_\varphi - \mu_0 F\left(\rho\kappa B_\varphi + \rho^2\Omega\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow \qquad [\ldots] = G(\Psi)$

$$\rho B_\varphi \left(1-\mu_0\frac{F^2}{\rho_m}\right) = G(\Psi) + \mu_0\rho^2\Omega(\Psi)F(\Psi)$$

Das ist ein algebraischer Zusammenhang zwischen B_φ und ρ_m, also keine Differentialgleichung. Kritischer Punkt:

$$\begin{aligned}
1-\mu_0\frac{F^2}{\rho_m} &= 0\\
1-\mu_0\rho_m\kappa^2\frac{B_{\text{pol}}^2}{B_{\text{pol}}^2} &= 0\\
1-\mu_0\frac{\rho_m}{B_{\text{pol}}^2}v_{\text{pol}}^2 &= 0\\
\frac{B_{\text{pol}}^2}{\mu_0\rho_m} &= v_A^2
\end{aligned}$$

Kritisch: $\qquad v_{\text{pol}} = v_A^2$

Komponente in Richtung von $\vec{B}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{pol}}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} &= \kappa B_\rho\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_\rho) + \kappa B_z\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_z)\\
&\quad -\kappa^2 B_\varphi^2\frac{B_\rho}{\rho} - \rho\Omega^2 B_\rho - 2\kappa\Omega B_\varphi B_\rho\\
&= -\frac{1}{\rho_m}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)p + -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)V +\\
&\quad \underbrace{\frac{1}{\rho_m}B_\rho\left(j_\varphi B_z - j_z B_\varphi\right) + \frac{1}{\rho_m}B_z\left(j_\rho B_\varphi - j_\varphi B_\rho\right)}_{\frac{1}{\rho_m}B_\varphi\left(j_\rho B_z - j_z B_\rho\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{2}\kappa^2 B_{\text{pol}}^2\right) - \kappa^2 B_\varphi^2\frac{B_\rho}{\rho} - \rho\Omega^2 B_\rho - 2\kappa\Omega B_\varphi B_\rho\\
= \;& -\frac{1}{\rho_m}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)p - \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)V - \frac{\kappa}{\rho}B_\varphi\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\rho\kappa B_\varphi + \rho^2\Omega\right)\\
= \;& -\kappa B_\varphi\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)(\kappa B_\varphi) - \frac{\kappa}{\rho}B_\varphi^2 B_\rho\Omega - \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{2}\kappa^2 B_\varphi^2\right) - 2\kappa B_\varphi B_\rho\Omega
\end{aligned}$$

Man kann nun eine Zustandsgleichung der Form $p = c\rho_m^\gamma$ einsetzen.

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{2}\kappa^2\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\frac{c\gamma}{\gamma-1}\rho_m^{\gamma-1} + V\right) - \underbrace{\rho\Omega^2 B_\rho}_{\frac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\Omega^2\rho^2\right)} = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\kappa^2\vec{B}^2 - \frac{1}{2}\rho^2\Omega^2 + \frac{c\gamma}{\gamma-1}\rho_m^{\gamma-1} + V\right) = E(\Psi)}$$

Mit

$$\kappa = \frac{F}{\rho_m} \qquad \rho B_\varphi = \frac{G(\Psi) + \mu_0 \rho^2 \Omega F}{1 - \mu_0 \frac{F^2}{\rho_m}} \qquad \vec{B}_{\mathrm{pol}} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \Psi \times \vec{e}_\varphi$$

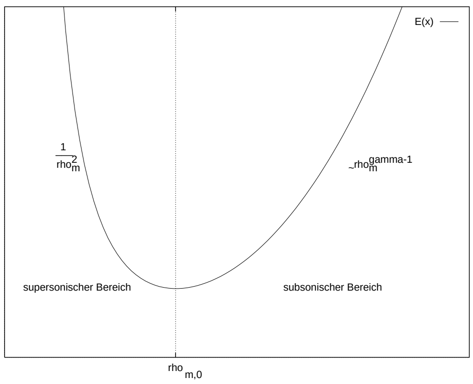
folgt

$$\boxed{\frac{1}{2\rho^2} \left(\vec{\nabla}\Psi\right)^2 \frac{1}{\rho_m^2} + \frac{F^2}{2\rho^2} \left(\frac{G(\Psi) + \mu_0 \rho^2 \Omega F}{\rho_m - \mu_0 F}\right)^2 - \frac{\rho^2 \Omega^2}{2} + \frac{c\gamma \rho_m^{\gamma-1}}{\gamma - 1} + V = E(\Psi)}$$

Sind E, F, G, Ω, $(\vec{\nabla}\psi)^2$ gegeben, so hat man eine algebraische Gleichung für ρ_m.

Spezialfall: Keine Rotation, d.h. $v_\varphi = 0$ und $\Omega = 0$ $\Rightarrow$ $B_\varphi = 0$ und $G = 0$

$$\frac{1}{2} F^2 \frac{1}{\rho^2} (\vec{\nabla}\psi)^2 \frac{1}{\rho_m^2} + \frac{c\gamma}{\gamma - 1} \rho_m^{\gamma-1} + V = E$$



Minimum bei ρ_{m0}:

$$-F^2 \frac{1}{\rho^2} (\vec{\nabla}\Psi)^2 \frac{1}{\rho_{m0}^2} + c\gamma \rho_{m0}^{\gamma-2} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho_{m0}^{\gamma+1} &= \frac{F^2}{c\gamma\rho^2} (\vec{\nabla}\Psi)^2 \\ &= \frac{\rho_m^2 \kappa^2}{c\gamma} \vec{B}_{\mathrm{pol}}^2 \\ &= \frac{\rho_m^2 \vec{v}_{\mathrm{pol}}}{c\gamma} \\ &= \frac{\rho_m^{\gamma+1} \vec{v}_{\mathrm{pol}}^2}{v_s^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}}\right)^{\gamma+1} = \left(\frac{v_s}{v_{\mathrm{pol}}}\right)^2$$

ρ_{m0} trennt Unter- und Überschallbereich.

Komponente in Richtung von $\vec{\nabla}\Psi$.

$$
\begin{aligned}
& \vec{\nabla}\Psi \cdot (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \\
= \; & \kappa\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\left((\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\kappa\right)\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+\kappa(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})B_\rho-\kappa\frac{B_\varphi^2}{\rho}-2\Omega B_\varphi-\frac{\rho}{\kappa}\Omega^2\right) \\
& +\kappa\frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\kappa+\kappa(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})B_z\right) \\
= \; & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\kappa B_\varphi+\rho\Omega\right)^2+\kappa^2\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right) \\
& +\kappa^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)\right) \\
= \; & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\kappa B_\varphi+\rho\Omega\right)^2+\frac{\kappa^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right. \\
& \left.-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\partial z}\right) \\
= \; & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\kappa B_\varphi+\rho\Omega\right)^2+\frac{\kappa^2}{\rho^2}\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-2\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\partial z}+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \\
= \; & \frac{1}{\rho_m}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(j_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}-j_zB_\rho\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(j_\rho B_\varphi+j_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right\} \\
& -\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}V-\frac{1}{\rho_m}\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}p
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\{\ldots\} = -(\vec{\nabla}\Psi)^2\frac{1}{\rho^2\mu_0}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\mu_0\rho}B_\varphi(\vec{\nabla}\Psi)\cdot\vec{\nabla}(\rho B_\varphi)
$$

$\rho_m\mu_0\cdot\ldots$

$$
\begin{aligned}
0 = \; & - \; (\vec{\nabla}\Psi)^2\frac{1}{\rho^2\mu_0}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) \\
& - \; \mu_0\frac{F^2}{\rho_m\rho^2}\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-2\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\partial z}+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \\
& - \; \frac{1}{\mu_0\rho}B_\varphi(\vec{\nabla}\Psi)\cdot\vec{\nabla}(\rho B_\varphi)-\mu_0\frac{\rho_m}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\left(\kappa B_\varphi+\rho\Omega\right)^2 \\
& + \; \mu_0\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}p+\mu_0\rho_m\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}V
\end{aligned}
$$

$$
p = c(\Psi)\rho_m^\gamma
$$

$$
\rho_m = \rho_m(\rho, z, \Psi, (\vec{\nabla}\Psi)^2) \qquad B_\varphi = B_\psi(\rho, z, \Psi, (\vec{\nabla}\Psi)^2)
$$

Diese Rechnung hat gezeigt, das mit physikalisch einfachen Gegebenheiten und vielen simplen mathematischen Umformungen Formeln entstehen, deren Lösung, wenn überhaupt, nur in den aller einfachsten Spezialfällen möglich ist.

Anhang A

Vektor-Identitäten

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (A \circ B \circ C)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \circ \vec{B} \circ \vec{D})\vec{C} - (\vec{A} \circ \vec{B} \circ \vec{C})D = (\vec{A} \circ \vec{C} \circ \vec{D})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C} \circ \vec{D})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\Phi + \Phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\Phi \times \vec{A} + \Phi\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\frac{1}{2}\vec{A}^2) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times ((\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - ((\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Anhang B

Zylinder-Koordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_\vartheta + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta + \left(\frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta}\right)\right)\vec{e}_r + \left(\Delta A_\vartheta - \frac{1}{r^2}\left(A_\vartheta - 2\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)\right)\vec{e}_\vartheta + \Delta A_z\vec{e}_z$$

Literaturverzeichnis

[1] Francis F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Plenum Press, New York, 1984